JULIO FERNANDO SUÁREZ CIFUENTES

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROBABILIDAD

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

I.S.B.N 958-9322-75-1

AUTOR:

JULIO FERNANDO SUÁREZ CIFUENTES
Estadístico
Ms. Sc. en Estadística Matemática
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

REVISADO:

JOSÉ HERNÁN PARRA SÁNCHEZ
Contador Público
Licenciado en Biología y Química
Esp. Economía Cafetera
Esp. estadística
Instructor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

IMPRESO:

Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Septiembre de 2002
Marzo de 2003
Primera Edición

Agradecimientos

Deseo mencionar a las personas que de una u otra manera me apoyaron en este proyecto:

- A los estudiantes de Introducción a la Teoría de Probabilidad, quienes fueron grandes motivadores, y algunos de ellos se tomaron la molestia de hacer correcciones en diferentes capítulos del texto.

- A los monitores de la asignatura Introducción a la Teoría de Probabilidad, Carlos Andrés Osorio y Lina Marcela Agudelo, quienes en diferentes semestres me colaboraron en la digitación del manuscrito.

- Al equipo de publicaciones de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, por el apoyo incondicional que me brindaron, sin ellos hubiese sido imposible efectuar esta edición.

- Finalmente, a mi esposa e hijas, a quienes les robe un poco de tiempo de nuestra vida familiar para poder adelantar este escrito, a pesar de esto, siempre me respaldaron y estimularon para lograr el objetivo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En muchos campos de la actividad humana se trabajan fenómenos que poseen algún grado de incertidumbre y en un importante número de situaciones se llega a decisiones soportadas en el estudio de tales hechos.

Así, el economista estudia la oferta y la demanda de un producto y establece alguna relación funcional sin llegar a determinar exactamente la interacción entre las dos; igualmente el médico evalúa al paciente y en ocasiones no puede precisar cuál es la enfermedad que le aqueja; el ingeniero tiene problemas de lograr exactitud en la resistencia de materiales, de confiabilidad de sus sistemas, de medición de precipitaciones atmosféricas, de la caracterización de un suelo, el mismo flujo del tráfico en una ciudad o una carretera; al sociólogo le interesa conocer el comportamiento de un cierto grupo de indígenas ante la civilización, sus aptitudes y actitudes con base en algunas de las personas que lo conforman; por igual diferentes profesionales buscan medir el riesgo que está involucrado en las decisiones que deben tomar.

La incertidumbre se presenta debido a la aleatoriedad del fenómeno que se observa, pero además por el desconocimiento del verdadero estado del sistema lo cual equivale a ignorar los parámetros que determinan ese estado de la naturaleza.

Existe incertidumbre, por ejemplo cuando: El agricultor se interesa sobre cuantas semillas serán vanas. El jefe de producción debe detener o no el proceso de producción. Al sociólogo le interesa de un conglomerado sus ingresos, estado civil, edad, etc. El ingeniero electrónico debe identificar la confiabilidad de un sistema.

Se requiere por lo tanto de un procedimiento estructurado, sistematizado, formalizado, es decir, científico, para manejar la incertidumbre y que además permita cuantificar los diversos niveles de ésta.

El ser humano ha tratado de medir su nivel de incertidumbre, tal medida se conoce como probabilidad.

Filosóficamente no se está desarrollando o descubriendo la probabilidad, ella es inherente al ser humano, sino que se está cuantificando.

Después de esta ambientación, tal vez su primer contacto con la probabilidad, es hora de observar con detenimiento la carátula del libro y luego despertar la imaginación tratando de asociar la teoría de probabilidad con la imagen de referencia. Desde luego, yo hice el ejercicio previamente y concebí algunas ideas que también deseo compartir con ustedes.

Con la portada del libro se pretende dar una visión de algunos de los muchos casos en donde tiene aplicabilidad la teoría de probabilidad, constituyentes a la vez de un soporte para dejar volar la imaginación acerca de los campos en los cuales se puede hablar en términos probabilísticos.

Es así como en un primer plano se encuentra una persona trabajando en un poste por donde pasan líneas de transmisión de energía, de teléfonos, de televisión por cable, etcétera, en cuyos casos se pueden hacer estudios apoyados en la teoría de probabilidad y relacionados con la eficiencia de estas redes, su confiabilidad, la calidad de los elementos conectados, el desgaste que sufren en un determinado tiempo, la aparición de conexiones autorizadas, la presencia o ausencia de señal, su intensidad, y otra gran cantidad. La misma persona representa a tantos trabajadores que intervienen de esa u otra forma, en cuyas actividades está presente por lo menos el riesgo (probabilidad) de sufrir accidentes, aspecto este asociado a la seguridad industrial.

Entrando un poco más en el mosaico, se encuentra una rama de café y luego otros productos de la tierra, típicos de nuestra región, que hacen pensar en por ejemplo la probabilidad de que las semillas sean viables o no, pronósticos de las cosechas con grados de seguridad (probabilidad), evaluación de la calidad de tales productos, estimación de las plagas y enfermedades que atentan contra las cosechas, de la efectividad de los productos usados para combatirlas, los diferentes componentes del clima, y muchos más que tendrían que considerarse en los estudio relativos al campo agropecuario.

Resalta en la figura el componente ciudad, aquí nuevamente se genera cualquier cantidad de fenómenos que deben asociarse con las probabilidades. Desde el punto de vista de los sectores económicos se pueden mencionar algunos tales como, salud, financiero, inmobiliario, industrial, comunicaciones, etcétera, en los cuales se describen y analizan características que están asociadas a riesgos o hechos que tienen correlación con algún grado de incertidumbre (probabilidad). La presencia de una determinada enfermedad, la evolución de los mercados bursátiles, el crecimiento de la construcción, la demanda y oferta de un producto, la trasmisión de una señal, son todas ellas variables que pueden ser analizadas probabilísticamente.

El vehículo que hace parte de este collage, interviene representando las diferentes máquinas que se requieren en tantas y tantas labores que debe efectuarse en distintos trabajos desde los más elementales hasta los que tienen que utilizar sistemas con tecnología de punta. Es indudable la aplicación de la medida de probabilidad que tiene que ver también con la eficiencia del sistema que se está empleando, la resistencia de la máquina, la duración de sus elementos, el costo-beneficio que podría tener y así otras cuantas.

Las ciudades están habitadas por personas que intervienen en las diferentes investigaciones de una u otra forma, y de las cuales es necesario conocer su estructura, su forma de vida, sus problemas y dificultades, sus necesidades, etcétera, para formular políticas y programas nuevos, evaluar y monitorear los existentes, de tal manera que muchas veces es necesario utilizar muestras aleatorias de esas poblaciones para estimar probabilísticamente eso que queremos saber de todos los que conforman los conglomerados de referencia.

La luna nos proyecta al espacio, representa el universo (estrellas, planetas, satélites, asteroides, etc). El hombre siempre ha estado interesado en conocer si existe vida en otras galaxias, para ello observa mas allá de la tierra por ejemplo con telescopios, viajando al cosmos y utilizando vehículos y sistemas que deben suministrar algún grado de confianza de su eficiencia para alcanzar el objetivo. Así mismo, se han diseñado planes de defensa y ataque ante posibles conflictos mundiales. A la vez, los científicos hablan de la capa de ozono, los rayos ultravioleta, la contaminación ambiental, y el factible efecto sobre la humanidad de muchos agentes que probablemente están atentando contra el bienestar del planeta. Todo esto, también esta soportado en un fuerte contenido probabilístico, de ahí nace la justificación de contribuir con la presentación de este libro.

I. ELEMENTOS BÁSICOS

1. CLASES DE EXPERIMENTOS

En la vida cotidiana se pueden encontrar dos clases de fenómenos o experimentos:

1.1 Determimísticos

Al realizarlos bajo las mismas condiciones generales, presentan siempre el mismo resultado.

1.2 Aleatorios

Aún cuando se observen bajo las mismas condiciones y se conozcan los posibles resultados ninguno se puede anticipar con certeza.

Los primeros se relacionan con la causalidad que implica conocimiento y control de los factores que determinan el comportamiento del fenómeno.

Los segundos obedecen a factores de casualidad o del azar además de los causales, pero con la imposibilidad de controlarlos debido al desconocimiento de las causas.

Algunos aseguran que todo fenómeno posee los dos tipos de factores, pero que en ciertos casos la importancia de los casuales es tan poca que se considera despreciable y se acepta entonces el determinismo absoluto.

Ejemplos

Determinísticos:

1 Leyes gravitacionales (un cuerpo baja en ciertas condiciones).
2 Leyes de Kepler (comportamiento de los planetas).
3 Al quemar un hidrocarburo como el gas propano en presencia del oxígeno, se produce gas carbónico más agua.
4 Se hace actuar sobre un cuerpo de un kg. de masa una fuerza de un Newton, se obtiene una aceleración de un metros/segundo^2

Aleatorios:

5 Seleccionar de un lote un artículo para conocer su calidad.
6 El querer determinar la cantidad de lluvia que caerá debido a una tormenta que pasa por una zona específica, el origen de la tormenta, la dirección de la tormenta, etc.
7 La velocidad de una partícula en un ambiente determinado.
8 La amplitud y la fase de la intensidad de la luz emitida por una fuente.
9 El resultado de un partido de fútbol.
10 El número de llamadas telefónicas por minuto, la duración de cada llamada.
11 La intensidad del ruido de un sistema de comunicación.
12 La resistencia mínima de un conjunto de resistencias en una línea de producción.

2. OBJETO DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

El objeto de la teoría de probabilidades es proporcionar un modelo matemático adecuado, aplicable a la descripción e interpretación de los fenómenos aleatorios. La construcción del modelo se basa en los siguientes conceptos:

2.1 Espacio Muestral

Sea Ψ un fenómeno aleatorio y Ω un conjunto tal que:

a. Todo elemento de Ω representa al menos un posible resultado de Ψ.
b. Todo resultado de Ψ tiene asociado uno y sólo un elemento de Ω.

Entonces Ω se llama *Espacio Muestral*.

Ejemplo 13

Sea el fenómeno aleatorio ψ el resultado de un partido de fútbol:

a. $\Omega_1 = \{G_A, NG_A\}$ G_A = Gana el equipo A NG_A = No gana el equipo A

b. $\Omega_2 = \{G_A, E, P_A\}$ E = Empata P_A = pierde el equipo A

Por lo tanto, en la elección de un Espacio Muestral se debe tener en cuenta que tipo de respuestas del fenómeno se desean estudiar Ω_1, Ω_2 o cualquier otro.

Ejemplo 14

Suponga que el fenómeno aleatorio es lanzar 2 dados, uno rojo y uno verde, interesa:

a. La frecuencia de aparición del número "4".

$\Omega_1 = \{0, 1, 2\}$

b. La suma de las caras que quedan hacia arriba.

$\Omega_2 = \{S / 2 < S < 12, \wedge, S \in N\}$

$\Omega_3 = \{(i, j) / 1 < i < 6, \wedge, 1 < j < 6, \quad S = i + j\}$

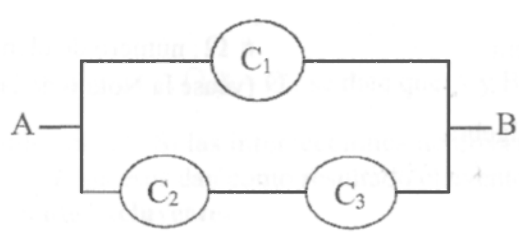
$\Omega_4 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Ejemplo 15

Si la duración de un artículo es un fenómeno aleatorio entonces: $\Omega = \Re^{+}$

Ejemplo 16

Suponga un sistema cualquiera (el flujo de un líquido, una señal de comunicación, una fuente radioactiva, etc) que va de A a B, como se muestra en la figura, donde C_i indica el componente i funciona (i=1, 2, 3,). Es de interés considerar el número de salidas del sistema. Por tanto, $\Omega = \{0, 1, 2\}$ equivalente a decir que es $\{0\}$ sí no hay un C_i bueno, $\{1\}$ existe una salida cuando C_1 funciona y los otros dos componentes no sirven ó alguno de ellos se encuentra dañado, $\{2\}$ cuando todos los componentes funcionan.



Punto Muestral: Se denomina a **W** Punto Muestral si **W** $\in \Omega$ asociado a ψ .

$$\Omega = \{W_1, W_2 .....\} W_i \in \Omega \quad i = 1, 2 ...$$

2.2 Sigma Algebra (σ - Algebra)

Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y $\mathcal{A}$ un conjunto de subconjuntos de Ω, conformado por no mas de $2^{\#\Omega}$ subconjuntos llamados Partes de Ω, $\mathcal{A}$ se llamará σ - álgebra si:

i. $\phi \in \mathcal{A}$

ii. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii. $\{Ai / i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\forall i} A_i \in \mathcal{A}$

Se pueden demostrar como consecuencia los siguientes teoremas:

1. Sea $\mathcal{A}$ σ - Algebra $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$
2. Sea $\mathcal{A}$ σ - Algebra y $\{Ai / i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i \in N} A_i \in \mathcal{A}$
3. Sea $\mathcal{A}$ σ - Algebra $I = \{i / i \in \mathbb{N}, \Lambda, i < K, K \in \mathbb{N}\}$, entonces

   a. $\bigcup_{i=1}^{K} A_i \in \mathcal{A}$

   b. $\bigcap_{i=1}^{K} A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 17

Sea Ω un espacio mues

$\mathcal{A}_1 = 2^{\#\Omega}$ es σ- Algebra

Ω: número de elementos de Ω (véase la Nota 6 de la página 33)

$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ es σ- Algebra

Ejemplo 18

Sea $\Omega = \{a, b, c\}$ $\quad 2^{\#\Omega} = 2^3 = 8$. Equivale al ejemplo 2.2 a. ó 2.4

a. $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \Omega\}$ es σ- Algebra? No

i. $\emptyset \in \mathcal{A}_1$

ii. $\{a\} \in \mathcal{A}_1$ pero $\{a\}^c \notin \mathcal{A}_1$, por lo tanto $\mathcal{A}_1$ no es σ-Algebra

b. $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ es σ-Algebra? Sí, $\mathcal{A}_2$ es σ-Algebra

i. $\emptyset \in \mathcal{A}_2$

ii. $\{a\} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \{a\}^c = \{b, c\} \in \mathcal{A}_2$

$\{b, c\} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \{b, e\}^c = \{a\} \in \mathcal{A}_2$

$\emptyset \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{A}_2$

$\Omega \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}_2$

iii. $\emptyset, \{a\}, \{b, c\} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \emptyset \cup \{a\} \cup \{b, c\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{A}_2$ por lo tanto, $\mathcal{A}_2$ es una σ-Algebra

2.3 Evento (suceso)

Es todo subconjunto de Ω, que a la vez pertenece a una σ-Algebra.

Sea $\mathbf{E} \subset \Omega$, $\mathbf{E} \in \mathcal{A}$ de donde a los elementos de una sigma álgebra $\mathcal{A}$ se les denomina eventos o sucesos.

Algunos eventos especiales pueden ser:

- Ω: Suceso seguro, cierto.
- Ø: Suceso imposible, nunca ocurre, nulo.
- W: Suceso elemental.
- Si A y B son sucesos de Ω y si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son Disjuntos.
- Sean *n* eventos definidos en Ω. Si las intersecciones de dos en dos, de tres en tres, y así sucesivamente de todos los sucesos dan como resultado el evento nulo, entonces los eventos se denominan **mutuamente excluyentes.**
- Cuando la unión de *n* eventos en Ω da como resultado Ω se denomina a tales sucesos con el nombre de **colectivamente exhaustivos**.
- Aquellos grupos de eventos colectivamente exhaustivos y a la vez mutuamente excluyentes se les considera una **partición del espacio muestral**.

Ejemplo 19

Del ejemplo 13, se puede definir el evento: E: El equipo A no pierde = $\{G_A, E\}$

Ejemplo 20

Del ejemplo 14, el evento: E: El resultado es exactamente un "4" = {1}

Ejemplo 21

Del ejemplo 15, el suceso: E: Al menos dura 50 horas = $\{W / W \geq 50\}$

Ejemplo 22

Del ejemplo 16, el evento: E: El sistema tiene no más de una salida = {0,1}

2.4 Algebra de Eventos

Sea C una colección de eventos A_i $i = 1, 2, ...,$ y W el resultado de un experimento aleatorio. Sí:

1. A_i ocurre $\Leftrightarrow$ $W \in A_i$
2. A_i no ocurre $\Leftrightarrow$ $W \notin A$, ó, $W \in A^c_i$
3. Ocurre A_1 ó A_2 $\Leftrightarrow$ $W \in (A_1 \bigcup A_2)$
4. Ocurren A_1 y A_2 $\Leftrightarrow$ $W \in (A_1 \bigcap A_2)$
5. Ocurre al menos (como mínimo) un A_i $\Leftrightarrow$ $W \in \bigcup_{\forall i} A_i$
6. Ocurren todos los sucesos A_i $\Leftrightarrow$ $W \in \bigcap_{\forall i} A_i$
7. Siempre que ocurra A_1 ocurre A_2 $\Leftrightarrow$ $W \in A_1 \subset A_2$
8. No ocurre al menos un suceso A_i $\Leftrightarrow$ ocurren todos los sucesos contrarios a los respectivos A_i $\Leftrightarrow W \in \left(\bigcup_{\forall i} A i\right)^c = \bigcap_{\forall i} A^c_i$
9. Ocurre A_1 y no ocurre A_2 $\Leftrightarrow$ $W \in (A_1 - A_2)$
10. Ocurre exactamente el evento A_1 y no ocurre A_2 $\Leftrightarrow$ $W \in (A_1 \bigcap A^c_2)$
11. A lo más ocurre un suceso pero no ambos $\Leftrightarrow$ $W \in (A_1 \bigcap A_2)^c$

Ejemplo 23

Un experimento consiste en elegir dos componentes electrónicos 1 x 1 y clasificarlos según cumplan o no requerimientos de temporización del producto. Si un componente no es aceptable, hay cuatro categorías como resultado de la temporización, T_1 , T_2 , T_3 y T_4 en las cuales se pueden clasificar.

Los eventos: E_1 indica que los dos productos son aceptables, E_2 denota que los dos productos no son aceptables, E_3 se refiere a que un producto es aceptable, E_4 describe al menos un producto es aceptable.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (A,A),(A,T_1),(A,T_2),(A,T_3),(A,T_4),(T_1,A),(T_2,A),(T_3,A),(T_4,A),(T_1,T_2), \\ (T_2,T_1),(T_1,T_3),(T_3,T_1),(T_1,T_4),(T_4,T_1),(T_2,T_3),(T_3,T_2),(T_2,T_4),(T_4,T_2), \\ (T_3,T_4),(T_4,T_3),(T_1,T_1),(T_2,T_2),(T_3,T_3),(T_4,T_4) \end{Bmatrix}$$

$E_1 = \{(A, A)\}$

$E_2 = \{(T_i, T_j)/\ i, j=1,2,3,4\}$

$E_3 = \{(A,T_1),(T_1,A),(A,T_2),(T_2,A),(A,T_3),(T_3,A),(A,T_4),(T_4,A)\}$

$E_4 = E_1 \bigcup E_3$

$E_1 \bigcap E_2$, $E_1 \bigcap E_3$ son eventos disjuntos.

La operación unión entre los eventos E_1, E_2, E_3, y E_4, es decir $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup E_4$ indica eventos colectivamente exhaustivos.

La operación intersección entre los eventos E_1, E_2 y E_3, es decir $E_1 \bigcap E_2 \bigcap E_3$ permite señalar que los sucesos son mutuamente excluyentes.

Definición. ESPACIO MEDIBLE

Sea Ω un espacio muestral, $\mathcal{A}$ una σ- Algebra. Se llama ESPACIO MEDIBLE al par $(\Omega, \mathcal{A})$. Sí el evento $A \in \mathcal{A}$. se dice que A es medible.

3. MEDIDA DE PROBABILIDAD

Sea (Ω, $\mathcal{A}$) un espacio medible.

Una medida de probabilidad, P, es una función valorada en los reales, cuyo dominio es $\mathcal{A}$

$$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$
$$A \to P(A)$$

tal que se cumplen los siguientes axiomas:

i. $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A) > 0$

ii. Sea $\{Ai / i \in \mathbb{N} . Ai \in \mathcal{A}\}$ mutuamente excluventes. entonces: $P\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \sum_{i \in N} P(A_i)$

iii. $P(\Omega) = 1$

Sí $A \in \mathcal{A}$ se dice que P(A) es la medida de probabilidad de la ocurrencia de A. P también es conocida como FUNCIÓN DE PROBABILIDAD.

Adicionalmente se pueden verificar por el lector los siguientes teoremas:

- **TEOREMA 1**

$P(\emptyset) = 0$

- **TEOREMA 2**

Sean $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in \mathcal{A}$ y mutuamente excluyentes, $\Rightarrow P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)$ $i \neq j$

Corolario. Sean $\{A_i / i = 1, 2 ... k \quad A_i \in \mathcal{A}\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

- **TEOREMA 3**

Sea $A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

- **TEOREMA 4**

Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) < P(A_2)$

Corolario: $0 < P(A) < 1$

• **TEOREMA 5**

Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A_1 \bigcup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \bigcap A_2)$

• **TEOREMA 6**

Sea un conjunto de subíndices $\mathbb{I} = \{i / i < k, i \in \mathbb{N}, K \in \mathbb{N}\}$ y $\{Ai / Ai \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}\}$

entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

Definición. ESPACIO DE PROBABILIDAD

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, y P una función de probabilidad definida sobre $\mathcal{A}$.

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le denomina ESPACIO DE PROBABILIDAD.

Ejemplo 24

Sea un experimento aleatorio Υ. asociado un espacio muestral numerable

$\Omega = \{W_i / i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ y $\mathcal{A} = 2^{\#\Omega}$ σ - Algebra.

Suponga un evento elemental $W_i \; \forall_i$ que constituye el suceso A, hallar la probabilidad de A.

Solución: $P(A) = P(W_i) = ?$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i-1}^{n} P(W_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A) = nP(A) = 1$$

$\Rightarrow P(A) = 1/n$, y se dice que los eventos W_i son EQUIPROBABLES.

NOTA 1. Sí Ω es un espacio muestral numerable, $\mathcal{A}$ una σ - Algebra con $2^{\#\Omega}$ eventos y P una medida de probabilidad, la tripleta $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se conoce como ESPACIO DE PROBABILIDAD DISCRETO.

NOTA 2. Sí en la nota anterior los eventos elementales son equiprobables el espacio de probabilidades se le asigna el nombre de ESPACIO LAPLACIANO.

Ejemplo 25

En el ejemplo anterior, suponga que el evento B contiene n(B) puntos muéstrales, es decir,

$B = \{W_i / i \in \mathbb{N}, \wedge, i < n(B)\}$, halle P(B).

La solución es: $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n(B)} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n(B)} P(W_i) - \frac{n(B)}{n}$

Lo cual indica que en un espacio de probabilidad Discreto, la probabilidad de un evento compuesto B se puede calcular por:

$$P(B) = \frac{\text{Total de resultados favorables a B}}{\text{Total de resultados posibles del experimento}} : \quad \text{PROBABILIDAD CLASICA}$$

Ejemplo 26

Un dado es cargado en tal forma que la probabilidad de que aparezca una cara es proporcional al número de puntos de esa cara, calcular la probabilidad de cada cara, asumiendo que se lanza una sola vez.

Solución:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $\quad$ Sea K una constante de proporcionalidad

$\Rightarrow P(I) = K.I \quad \therefore \quad K + 2K + 3K + 4K + 5K + 6K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{21} \therefore P(I) = \frac{1}{21}$

Ejemplo 27

Suponga un experimento Ψ, el cual puede tener los resultados a, b ó c. Considere una sola observación, fije Ω, una σ- Álgebra y establezca la función de probabilidad general.

Sea $\Omega = \{a, b, c\}$ $\quad \mathcal{A} = 2^{\#\Omega} = 2^3 = 8$

$\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \phi\}$ es una σ-Algebra

La medida de probabilidad P para cada evento se describe como:

$$
\begin{aligned}
P:\ \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{R}\ [0,1] \\
\{a\} &\rightarrow P\ (\{a\}) \\
\{b\} &\rightarrow P\ (\{b\})
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
\{b,c\} &\rightarrow P\ (\{b,c\}) \\
\{a,b,c\} &\rightarrow P\ (\{a,b,c\})=1 \\
\phi &\rightarrow P\ (\phi)=0
\end{aligned}
$$

Ejemplo 28

Suponga una partícula que efectúa desplazamientos sucesivos en una dimensión. La partícula puede desplazarse hacía la izquierda o hacia la derecha. Asumiendo tres desplazamientos, calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

E_1: Todos los desplazamientos son hacia la derecha.
E_2: Exactamente sucede un desplazamiento hacia la izquierda.
E_3: Máximo un desplazamiento hacia la izquierda
E_4: Al menos suceden dos desplazamientos hacia la izquierda.

La solución de este ejercicio implica describir los eventos:

Ω = {(DDD), (DDI), DID), (IDD), (DII), (IDI), (IID), (III)}
E_1 = {(DDD)} E_2 = {(DDI), (DID), (IDD)} $E_3 = E_1 \cup E_2$ $E_4 = \Omega - E_3$

Entonces:

$$P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(\Omega)}=\frac{1}{8} \quad P(E_2)=\frac{3}{8}$$

$$P(E_3)=P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}-0=\frac{4}{8}$$

$$P(E_4)=P(\Omega-E_3)=P(\Omega)-P(E_3)=1-\frac{4}{8}=\frac{4}{8}$$

Obsérvese que los eventos elementales son equiprobables.

Ejemplo 29

En una ciudad se publican los periódicos A, B, C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20% lee A, 16% lee B, 14% lee C. 8% lee A y B, 5% Lee A y C, 3% Lee B y C, 2% lee A, B y C. Para una persona escogida aleatoriamente, calcular la probabilidad de que:

a. No lea ninguno de los periódicos.
b. Lea exactamente uno de los periódicos.
c. Lea al menos A y B

Solución: Sean los eventos

A: La persona lee el periódico A.
B: La persona lee el periódico B.
C: La persona lee el periódico C.
H: La persona no lee ninguno de los tres periódicos.
F: La persona lee exactamente uno de los periódicos.
G: La persona lee al menos los periódicos A y B.

a. $P(H) = P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$
$$=0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}14 - 0{,}08 - 0{,}05 - 0{,}03 + 0{,}02 = 0{,}36$$

b. $P(F) = P[(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)]$

Si lee el periódico A, no lee el B, ni tampoco el C, de ahí que los eventos compuestos sean excluyentes, y la probabilidad de F se puede escribir así

$$P(F) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C)$$

Los eventos tipo

$$A \cap B^c \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c = A \cap [\Omega - (B \cup C)] = A - A \cap (B \cup C)$$
$$= A - (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$
$$= P(A) - P[(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] = 0.09$$

$P(F)= 0.09 + 0.07 + 0.08 = 0.24$

c. $P(G)= P[(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)]$
$= P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B \cap C) = 0.06 + 0.02 = 0.08$

La interpretación de la medida de probabilidad de los eventos H, F y G se hace de una manera sencilla.

- La probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente no lea ningún periódico es igual a 0.64.

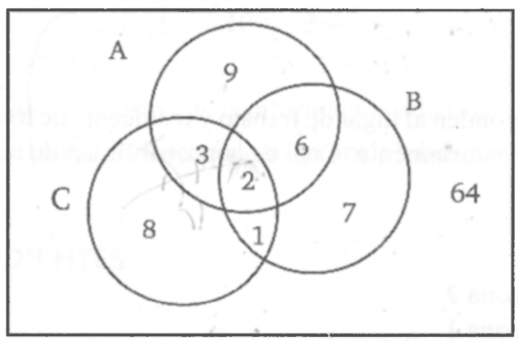
- La probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente lea exactamente un periódico es de 0.24.

- La probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente lea al menos los periódicos A y B es de 0.08.

En términos de frecuencia relativa expresada en porcentaje, es posible generalizar el resultado probabilistico así:

- El 64% de las personas no lee los periódicos A, B y C.
- El 24% de la población lee exactamente un periódico.
- El 8% de las personas lee al menos los periódicos A y B

OBSERVACIÓN. Los diagramas de Venn - Euler constituyen un soporte importante para el planteamiento y posterior solución de algunos problemas de probabilidades. Así, el ejemplo 29 se puede graficar:



$= \Omega$

NOTA 3. El caso del lanzamiento de un dado permite aclarar la definición de la medida de probabilidad a partir de una frecuencia relativa. Si el dado se lanza una vez, y A es el evento que indica ocurre un número impar, la probabilidad de A es un 1/2. Al lanzar el dado n = 40 veces, A puede ocurrir en 15 lanzamientos, la frecuencia relativa de A sería 15/40 (= 0.375).

Ahora suponga que se lanza 500 veces el dado, A podría suceder 240 veces y la frecuencia relativa sería 240/500 (=0.48).

Y así sucesivamente se lanzaría el dado infinito número de veces y finalmente se encontraría la probabilidad de A igual a un medio.

A medida que ha ido en aumento el número de èxperimentos, la frecuencia del suceso A se va regularizando o estabilizando al rededor de cierto número, la medida de probabilidad.

Aquello es semejante a tener una muestra de personas la cual permite conocer la frecuencia relativa de los eventos soltero, género masculino, salarios mayores que el mínimo, profesionales ocupados, etc.; una muestra de artículos producidos en una fábrica para encontrar la frecuencia relativa de defectuosos con diámetro mayor a 3 mm, de longitud al menos de una pulgada, etc; respecto a un conjunto de llamadas sucedidas entre las 8 a.m y las 9 a.m se querrá determinar la probabilidad de eventos como la duración de una llamada telefónica es de un minuto, el número de llamadas en esa hora se encuentra entre 5 y 11, etc; entre otros casos.

Se sintetiza lo anterior en el siguiente enunciado:

Sí un fenómeno es observado n veces y un suceso **A** se repite n(**A**) veces, la frecuencia relativa f (**A**) es:

$f(A) = \frac{n(A)}{n}$, la probabilidad del mismo suceso A, $P(A) = \lim_{n\to\alpha} f(A)$

En otras palabras, si se tiene una población finita y se realiza un censo (observación completa de los elementos que conforman la población) en condiciones normales, la FRECUENCIA RELATIVA de un evento A es a la vez la probabilidad del suceso A.

Ejemplo 30

Los siguientes datos corresponden al lugar de trabajo y residencia de los habitantes de una región. Un trabajador es seleccionado aleatoriamente. Cuál es la probabilidad de que:

a. Resida en la zona 3
b. Trabaje en la zona 4
c. Resida y trabaje en la zona 2
d. Resida o trabaje en la zona 1
e. No trabaje en la zona 4
f. Trabaje en la zona 4, si se conoce que reside en la zona 3

ZONA DE TRABAJO	**ZONA DE RESIDENCIA (R)**			**TOTAL**
(T)	**1**	**2**	**3**	**(T)**
1	80	40	10	130
2	70	60	20	150
3	50	50	20	120
4	200	150	50	400
TOTAL	**400**	**300**	**100**	**800**

Solución:

Se define Rj: Suceso que denota, el trabajador reside en la zona j (j = 1, 2, 3)

Ti: Evento que indica el trabajador labora en la zona i (i = 1, 2, 3, 4)

a. $P(R_3) = \dfrac{n(R_3)}{n(\Omega)} = \dfrac{100}{800} = \dfrac{1}{8}$

b. $P(T_4) = \dfrac{n(T_4)}{n(\Omega)} = \dfrac{400}{800} = \dfrac{1}{2}$

c. $P(T_2 \bigcap R_2) = \dfrac{n(T_2 \bigcap R_2)}{n(\Omega)} = \dfrac{60}{800} = \dfrac{3}{40}$

d. $P(R_1 \bigcup T_1) = P(R_1) + P(T_1) - P(R_1 \bigcap T_1) = \dfrac{450}{800} = \dfrac{9}{16}$

$\dfrac{400}{800} + \dfrac{130}{800} - \dfrac{80}{800}$

e. $P(T_4{}^c) = 1 - P(T_4) = \dfrac{1}{2}$

f. $P(T_4 \text{ si ocurrió } R_3) = \dfrac{n(T_4 \bigcap R_3)}{n(R_3)} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

En f ya no interesa todo Ω, puesto que la información adicional, R_3, restringe Ω a lo observado en sólo R_3, lo cual más adelante se conocerá como probabilidad condicional.

4. EVENTOS INDEPENDIENTES

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Los eventos A_1 y A_2 son independientes sí y sólo sí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $I = \{i \,/\, i \in N,\ i < k,\ k \in N\}$, $\{A_i \,/\, A_i \in \mathcal{A},\ \forall\ i \in I\}$

Los eventos $A_1, A_2, \dots, A_k$ son independientes conjuntamente o mutuamente independientes sí:

$$P\left(\bigcap_{i \in N} A_i\right) = \prod_{i \in N} P(A_i)$$

Ejemplo 31

Una persona lanza tres veces una moneda. Calcular la probabilidad de obtener una cara (A).

Solución: C: Evento que indica el resultado es cara
S: Evento que indica el resultado es sello

$$P(C) = \frac{1}{2} = P(S) \quad \rightarrow \quad P(A) = P\left[(CSS) \bigcup (SCS) \bigcup (SSC)\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 * 3 = 0.375$$